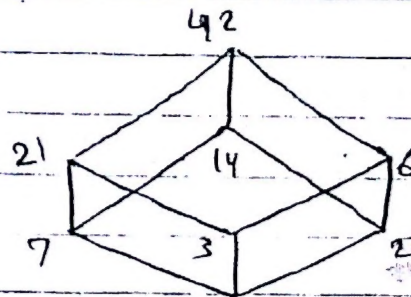


قريباً

هذه هي شبكة بوليان

$$D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

الحل:



$$\forall a, b, c \in E; a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

إذا توفيت

$$\forall n, m \in D(42)$$

حيث يكون m مقسم لـ n

$$\left. \begin{array}{l} n \vee m = 42 \\ n \wedge m = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{lcm}(n, m) = 42 \\ \text{gcd}(n, m) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow n \cdot m = \text{gcd}(n, m) \cdot \text{lcm}(n, m)$$

$$\begin{aligned} n \cdot m &= 42 \Rightarrow n = \frac{42}{m} \\ \Rightarrow m' &= \frac{42}{m} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن شبكة مقفلة

الشبكة هي شبكة بول

قريباً

ليكن لدينا (E, \leq, \vee, \wedge) شبكة توزيعية وليكن $[a, b]$ مجالا مغلقا

$$\begin{aligned} z \in E; \quad & a \leq z \\ & z \leq b \end{aligned}$$

$$f: E \longrightarrow [a, b] \quad \text{برهان أن العلاقة}$$

$$x \longmapsto [x \vee a] \wedge b$$

هو مورفزم من شبكة غامر هذه هو متباين ولذا ؟

الحل:

$$\bullet \forall x, y \in E ; x=y \stackrel{?}{\longrightarrow} P(x)=P(y)$$

$$\Rightarrow x=y \Rightarrow x \vee a = y \vee a ; \forall a \in E$$

$$(x \vee a) \wedge b = (y \vee a) \wedge b \Rightarrow P(x)=P(y)$$

فإن P ←

$$\bullet \forall x, y \in E ; \begin{cases} \rightarrow P(x \wedge y) \stackrel{?}{=} P(x) \wedge P(y) \\ \rightarrow P(x \vee y) \stackrel{?}{=} P(x) \vee P(y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(x \wedge y) &= [(x \wedge y) \vee a] \wedge b = [(x \vee a) \wedge (y \vee a)] \wedge b \wedge b = \\ &= [(x \vee a) \wedge b] \wedge [(y \vee a) \wedge b] \\ &= P(x) \wedge P(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(x \vee y) &= [(x \vee y) \vee a] \wedge b = [(x \vee a) \vee (y \vee a)] \wedge b \\ &= [(x \vee a) \wedge b] \vee [(y \vee a) \wedge b] \\ &= P(x) \vee P(y) \end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا ←

$$\bullet \forall z \in [a, b] \subset E$$

$$P(z) = [z \vee a] \wedge b = z \wedge b = z$$

$$a \leq z$$

فإن P ←

$$\bullet P(x) = P(y) \stackrel{?}{\longrightarrow} x=y$$

$$(x \vee a) \wedge b = (y \vee a) \wedge b$$

وبذلك نكون قد أثبتنا ←

$$x \vee a = y \vee a$$

فإن P ←

تمرین ۱
بفرمده (S, \wedge, \vee, \perp) شبکه بولیایی.

$$\forall a \in S; \theta: S \rightarrow [0, a] \times [a, 1]$$

$$x \mapsto (x \wedge a, x \vee a)$$

برهه آن θ ایزومورفیزم هستی.
ملاحظه

$$\begin{array}{l} \theta: \text{مورفیزم هستی} \\ \theta: \text{غاصر} \\ \theta: \text{متباین} \\ \Downarrow \\ \text{ایزومورفیزم هستی} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \theta: \text{مورفیزم ترتیب} \\ \theta: \text{متباین} \\ \theta^{-1}: \text{مورفیزم ترتیب} \\ \Downarrow \\ \text{ایزومورفیزم ترتیب} \end{array}$$

الحال:

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a \\ &\quad x \vee a = y \vee a \\ &\Leftrightarrow (x \wedge a, x \vee a) = (y \wedge a, y \vee a) \\ &\Leftrightarrow \theta(x) = \theta(y) \end{aligned}$$

ای θ آن تطبیق و متباین.

$$\begin{aligned} \theta(x \wedge y) &= \theta(x) \wedge \theta(y) \\ \theta(x \wedge y) &= ((x \wedge y) \wedge a, (x \wedge y) \vee a) \\ &= ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a), (x \vee a) \wedge (y \vee a)) \\ &= (x \wedge a, x \vee a) \wedge (y \wedge a, y \vee a) \\ &= \theta(x) \wedge \theta(y) \end{aligned}$$

?

$$\begin{aligned} \theta(x \vee y) &= \theta(x) \vee \theta(y) \\ \theta(x \vee y) &= ((x \vee y) \wedge a, (x \vee y) \vee a) \\ &= ((x \wedge a) \vee (y \wedge a), (x \vee a) \vee (y \vee a)) \\ &= (x \wedge a, x \vee a) \vee (y \wedge a, y \vee a) \end{aligned}$$

$$= \Theta(x) \vee \Theta(y)$$

اذا كان Θ مورفزم جزئي

$$z \leq a \quad a \leq y$$

$$\Rightarrow z \leq a \leq y \Rightarrow z \leq y$$

$$\bullet \forall (z, y) \in [0, a] \times [a, 1]$$

$$x = z \vee (y \wedge a') \in S$$

$$\Theta(x) = (x \wedge a, x \vee a) \stackrel{?}{=} (z, y)$$

$$x \wedge a = (z \vee (y \wedge a')) \wedge a$$

$$\stackrel{z \leq a}{=} (z \wedge a) \vee (y \wedge a') \wedge a$$

$$= z \vee (y \wedge 0)$$

$$= z \vee 0 = z$$

$$x \vee a = (z \vee (y \wedge a')) \vee a$$

$$= z \vee [(y \wedge a') \vee a]$$

$$= z \vee [(y \vee a) \wedge \underbrace{(a' \vee a)}_{=1}]$$

$$= z \vee [y \vee a] = z \vee y = y$$

$$\# z \leq y$$

$$\Rightarrow \Theta(x) = \Theta(y)$$

اذا كان Θ كعوايزد مورفزم جزئي

استنتج، الملاحظة